Institut für
Mathematische Statistik

Alsmeyer/Winkler: Wahrscheinlichkeitstheorie
SS 2010, Blatt 3

Übungen

Abgabetermin: Freitag 7.5. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: $\mathfrak{L}_p$-Räume, $\mathfrak{L}_p$-Konvergenz, Lebesgue-Integral, Dichten, Bildmaße

Aufgabe 9 (6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und f, g zwei $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie:

a) $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$

b) $f \in \mathfrak{L}_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und μ endlich $\Rightarrow$ $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Es sei $(f_n)_{n\geq 0}$ in $\mathfrak{L}_1(\mu)$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsdichten (d.h. $\int f_n d\mu = 1$ und f_n ist nichtnegativ für alle $n \geq 0$). Zeigen Sie:

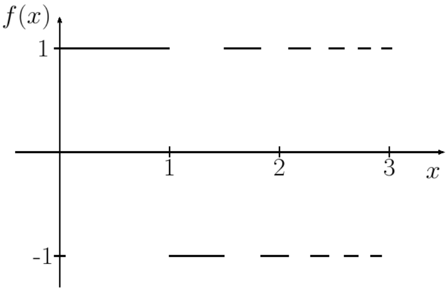
a) $f_n \to f_0$ für $n \to \infty$ punktweise $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}_1} f_0$ für $n \to \infty$.

b) $f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}_1} f_0$ für $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $\mu(|f_n - f_0| > \varepsilon) \to 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 11 (5 Punkte)

a) Es sei $s_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & \min\{n \mid x < s_n\} \text{ ungerade} \\ -1, & \min\{n \mid x < s_n\} \text{ gerade.} \end{cases}$$



Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

b) Sind $\lambda\!\!\lambda$ und $\nu = |f|\lambda\!\!\lambda$ äquivalent? Wenn nicht, geben Sie eine Zerlegung von $\lambda\!\!\lambda$ gemäß des Lebesgueschen Zerlegungssatzes an.

Bitte wenden!

Aufgabe 12 (5 Punkte)

a) Es sei für ein $n \in \mathbb{N}$ der messbare Raum $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\{0,1\}^n, \mathfrak{P}(\{0,1\}^n))$ gegeben und hierauf ein Maß μ mit $\mu(\omega) = 2^{-n}$ für alle $\omega \in \Omega$. Weiter seien

$$T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\{0, \dots, n\}, \mathfrak{P}(\{0, \dots, n\}), \ \ T(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

und

$$f : (\{0, \dots, n\}, \mathfrak{P}(\{0, \dots, n\}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}), \ \ f(x) = n - x$$

zwei messbare Abbildungen. Bestimmen Sie $\int f \circ T d\mu$ mit Hilfe des Transformationssatzes.

b) Gilt für einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und eine messbare Abbilung $T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ in einen weiteren messbaren Raum stets: μ ist σ-endlich $\Rightarrow$ μ^T ist σ-endlich?